שאלות מסכמות ברמת בחינה

שאלות

1) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_x + u_y = u \qquad x, y > 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x > 1 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases} \qquad u(0,y) = 0$$

2) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0 < x < \infty$$

$$u(x,0) = f(x) = 0 \qquad u_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$u_x(0,t) = 0$$

3) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה

$$u_{tt} + u_t = u_{xx} + Ax \qquad 0 < x < 1 \;,\; t > 0$$

$$u_x(0,t) = 2 \qquad u_x(1,t) = 1 \qquad u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

נתון כי $U(x) = \lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי. מצאו את הקבוע A ואת $U(x)$.

4) פתרו את הבעיה

$$\Delta u = r \qquad 1 < r < 2$$

$$u(1,\theta) = 1 + \sin\theta$$

$$u(2,\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

5) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_x + u_y + u = (2x+1)e^{x^2} \qquad y \ge e^{-x}$$

$$u(x, e^{-x}) = e^{x^2} + e^{-x}$$

6) נתונה הבעיה הבאה בתחום $t > 0$ $\quad 0 < x < 1$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + 4u \\ u(x,0) = x(1-x)e^{-2x}\sqrt{e} \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{1}{2},1\right) < \frac{1}{4\sqrt{e}}$

רמז : הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta x}$ עבור קבוע δ מתאים

7) עבור איזו פונקציה $h(x)$ לפתרון $u(x,t)$ של הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 10u & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = h(x) \\ u(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הגבול $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ קיים וסופי?

8) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 + y^2 & in \quad x^2 + y^2 < 1 \\ u|_{x^2+y^2=1} = 1 + x \end{cases}$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות

9) נתונה משוואת הגלים הבאה

$$u_{tt}=u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \qquad t>0$$

$$u(x,0)=1$$

$$u_t(x,0)=g(x)=\begin{cases}1-x^2 & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$$

חשבו את $u(x,1)$

10) נתונה הבעיה הבאה

$$\Delta u=0 \qquad x^2+y^2<1$$

$$u|_{x^2+y^2=1}=\cosh(x)\sinh(y)$$

חשבו את $u(0,0)$

11) נתונה הבעיה הבאה

$$\Delta u=0 \qquad 1<x^2+y^2<4$$

$$u|_{x^2+y^2=1}=\ln(2+x)$$

$$u|_{x^2+y^2=4}=\ln\left(e^{2019}-2+x\right)$$

הוכיחו כי בתחום $1<x^2+y^2<4$ מתקיים $0<u(x,y)<2019$

12) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה בתחום $x,y>0$

$$x^2u_{xx}+2xy\cdot u_{xy}+y^2u_{yy}=4x^2$$

13) השתמשו באינטגרל אנרגיה כדי להראות את יחידות הפתרון לבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}+\beta\cdot u_t=u_{xx}+F(x,t) & 0<x<L\ ,\ t>0\ ,\ \ \beta>0 \\ u_x(0,t)=A(t) \qquad u_x(L,t)=B(t) & \\ u(x,0)=f(x) & \\ u_t(x,0)=g(x) & \end{cases}$$

__רמז__: הגדירו $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^L w_t^2(x,t)+w_x^2(x,t)\,dx$

14) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t=a^2u_{xx} & 0<x<L\ ,\ t>0 \\ u(x,0)=x & \\ u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 & \end{cases}$$

15) נתונה המשוואה $2u_{xx}+2yu_{yy}+u_y=0$ בתחום $y>0$

א. הראו כי המשוואה אליפטית

ב. העבירו את המשוואה לצורה קנונית

16) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+e^{-t} & 0<x<\infty \\ u(0,t)=e^{-t}-1 & \\ u(x,0)=1 \qquad u_t(x,0)=2\sin(x)-1 & \end{cases}$$

17) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<1 \quad , \quad t>0 \\ u_x(0,t)=0 & u_x(1,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=x^2(1-x) \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 u_t^{\,2}(x,t)+u_x^{\,2}(x,t)\,dx$

18) $u(x,t)$ זה פתרון של הבעיה

$$u_t = u_{xx} \qquad -\infty<x<\infty \quad , \quad t>0$$

$$u(x,0)=h(x)=\frac{e^{-x}+2e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty}\frac{u_x(0,t)\sqrt{t}}{u(0,t)}$

19) מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה הבאה

$$u_{xx}-2\sin(x)u_{xy}-\cos^2(x)u_{yy}-\cos(x)u_y=0$$

20) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t+u_x=u_{xx} & 0<x<1 \quad , \quad t>0 \\ u(x,0)=e^{\frac{1}{2}x} \\ u(0,t)=0 \qquad u(1,t)=0 \end{cases}$$

חשבו $\lim_{t\to\infty} e^{\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)t}\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}x}u_t(x,t)\,dx$

21) פתרו את הבעיה

$u_x + 2u_y = u \qquad 1 + y - 2x > 0 \ , \ x < 0$

$u\left(x, x^2\right) = x + \sin\left(x^3\right) \qquad x < 0$

22) פתרו את הבעיה הבאה

$u_t = u_{xx} + \cos(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \ , \ t > 0$

$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 1$

$u(x,0) = x$

רמז: התבוננו בפונקציה $v(x,t) = u(x,t) - x$

23) נתון כי $u(r,\theta)$ היא פתרון של הבעיה הבאה

$\triangle u = 1 \qquad 0 \le r < 1$

$u(1,\theta) = c + \sin(2020 \cdot \theta)$

עבור איזה קבוע c מתקיים $\lim\limits_{r \to 0+} \dfrac{u(r,\theta)}{r^2} = \dfrac{1}{4}$?

24) נתונות הבעיות הבאות

$$\begin{cases} \triangle u = r^2 & 0 \le r < 1 \\ u(1,\theta) = \sin^{2019}(\theta) & 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \triangle v = r^2 & 0 \le r < 1 \\ v(1,\theta) = \cos^{2020}(\theta) \end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0) > v(0,0)$

25) נתון כי $u_n(r,\theta)$ זה פתרון של הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \triangle u_n = \left(\dfrac{r}{2}\right)^n & 0 \le r < 1 \\ u_n(1,\theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$

מצאו את $u_n(r,\theta)$ וחשבו $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(r,\theta)$

26) הוכיחו את יחידות הפתרון של בעיית החום הבאה עבור $b>0$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) & 0<x<1 \\ u(x,0) = h(x) & \\ v_x(0,t) - b\cdot v(0,t) = f(t) & t\ge 0 \\ u_x(1,t) + b\cdot u(1,t) = g(t) & t \ge 0 \end{cases}$$

רמז: היעזרו באינגרל אנרגיה $E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)\,dx$

27) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t}\sin(\pi x) & 0<x<2 \ ,\ t>0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \\ u(0,t)=0 \qquad u(2,t)=0 & \end{cases}$$

28) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 3\sin(2x) + \dfrac{\pi - x}{\pi} & 0<x<\pi \ ,\ t>0 \\ u(x,0) = \dfrac{x}{\pi} + \sin(x) & \\ u(0,t) = t \qquad u(\pi,t) = 1 & \end{cases}$$

רמז: הגדירו $u(x,t) = v(x,t) + t\frac{\pi - x}{\pi} + 1\cdot\frac{x}{\pi}$

29) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 1 + \sin(2\pi x) & 0<x<1 \ ,\ t>0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & \\ u(0,t) = u(1,t) = t & \end{cases}$$

רמז: כדאי להגדיר פונקציית עזר $v(x,t) = u(x,t) - t$

30) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \cos(x) & -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(x) + \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & else \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

חשבן $\int_{-2}^{2} |u(x,3)|^2 \, dx$

31) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=1} = x^2 + xy + y^2 \end{cases}$$

האם ייתכן כי $\iint\limits_{x^2+y^2<1} u(x,y)\,dxdy = \frac{7\pi}{4}$?

32) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < 3 \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = \frac{3}{\sqrt{1+t^2}} & u(3,t) = 3 \\ u(x,0) = 3 + 3x - x^2 \end{cases}$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{3}{2}, 1\right) < 2e$

33) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ u(0,t)=\arctan(t) & u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=x(x-\pi) \end{cases}$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{\pi}{2},1\right) > -\frac{\pi^2}{4}$

34) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0<x<\infty \ , \ t>0 \\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & 0\le x\le 1 \\ 0 & x>1 \end{cases} & u_t(x,0)=g(x)=0 \\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$$

חשבו $\int_0^2 \left|u(x,1)-\frac{1}{2}\right|^2 dx$

35) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \triangle u = r & 0\le r<1 \\ u(1,\theta)=\sin^{2019}(\theta) \end{cases}$$

חשבו את $u(0,0)$

תשובות סופיות

1) $$u(x,y)=\begin{cases} e^{y} & 0<x-y<1 \\ 0 & else \end{cases}$$

2) $$u(x,t)=\begin{cases} 0 & x\ge t+1 \\ \frac{1}{2}(1-x+t) & \max\{1-t,t-1\}\le x\le t+1 \\ t & 0\le x\le 1-t \quad (0\le t\le 1) \\ 1 & 0\le x\le t-1 \quad (t\ge 1) \end{cases}$$

3) $$U(x)=-\frac{1}{3}x^{3}+2x-\frac{11}{12} \quad , \quad A=2$$

4) $$u(r,\theta)=1+\frac{4}{3}r\cos(\theta)-\frac{4}{3}\frac{1}{r}\cos(\theta)-\frac{1}{3}r\sin(\theta)+\frac{4}{3}\frac{1}{r}\sin(\theta)+\frac{r^{3}}{9}-\frac{7}{9\ln(2)}\ln(r)-\frac{1}{9}$$

5) $$u(x,y)=e^{x^{2}}+e^{-x}$$

6) הוכחה

7) עבור פונקציה $h(x)$ המקיימת $\int_{0}^{1}h(x)\sin(\pi x)dx=0$

8) $$u(x,y)=\frac{15}{16}+x+\frac{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}{16}$$

9)
$$u(x,1)=\begin{cases}1 & x\ge 2\\ 1+\frac{2}{3}-x^2+\frac{x^3}{3} & 0\le x\le 2\\ 1+\frac{2}{3}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} & -2\le x\le 0\\ 1 & x\le -2\end{cases}$$

10) $u(0,0)=0$

11) הוכחה

12) $u(x,y)=2x^2+x\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$

13) הוכחה

14)
$$u(x,t)=\frac{L}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-4L}{\pi^2(2k+1)}e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{L}\right)^2 t}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{L}\right)$$

15) א. הוכחה

ב. $w_{\eta\eta}+w_{\xi\xi}=0$ כאשר $\eta=x$, $\xi=2\sqrt{y}$

16)
$$u(x,t)=\begin{cases}2\sin(x)\sin(t)+e^{-t}-1 & 0\le x<t\\ 1+2\sin(x)\sin(t)+e^{-t}-1 & x>t\end{cases}$$

17) $\frac{1}{105}$

18) $\frac{1}{3\sqrt{\pi}}$

19) $u(x,y)=F\left(y-\cos(x)+x\right)+G\left(y-\cos(x)-x\right)$

20) $-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{4}+\pi^2\right)$

21) $u(x,y)=e^{y-x+\left(1-\sqrt{1+y-2x}\right)-\left(1-\sqrt{1+y-2x}\right)^2}\left(1-\sqrt{1+y-2x}\right)+\sin\left(\left(1-\sqrt{1+y-2x}\right)^3\right)$

22) $u(x,t)=x+\frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\left[1-e^{-\pi^2 t}\right]$

23) $c=\frac{1}{4}$

24) הוכחה

25) $u_n(r,\theta)=r\sin(\theta)+\frac{r^{n+2}-1}{2^n(n+2)^2}$, $\lim_{n\to\infty}u_n(r,\theta)=y$

26) הוכחה

27) $u(x,t)=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)+e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)\frac{e^{(\pi^2-1)t}-1}{(\pi^2-1)}$

28) $u(x,t)=e^{-t}\sin(x)+\frac{3}{4}\sin(2x)\left(1-e^{-4t}\right)+t\frac{\pi-x}{\pi}+\frac{x}{\pi}$

29) $u(x,t)=e^{-\pi^2\cdot t}\sin(\pi x)+\frac{1}{4\pi^2}\left(1-e^{-4\pi^2 t}\right)\sin(2\pi x)+t$

30) $\int_{-2}^{2}|u(x,3)|^2\,dx=2+\frac{1}{2}\sin(4)$

31) לא

32) הוכחה

33) הוכחה

34) $\int_{0}^{2}\left|u(x,1)-\frac{1}{2}\right|^2 dx=\frac{1}{10}$

35) $u(0,0)=-\frac{1}{9}$